

Análisis de secciones compuestas mediante modelos de fibras

Iturribizia, S.L.

29 de octubre de 2007

Índice

1. Introducción	1
2. Hipótesis y consideraciones de partida	2
3. Fuerzas y deformaciones generalizadas	2
4. Ecuaciones cinemáticas	4
5. Modelos constitutivos de las fibras	4
6. Determinación de la respuesta de la sección	6
6.1. Rigidez de la sección	6
6.2. Respuesta de la sección	7
7. Conclusión	7

Índice de figuras

1. Modelo de fibras (tomada de la referencia [2]).	2
2. Fuerzas y deformaciones generalizadas (tomada de la referencia [2]).	3
3. Modelo del material <i>Steel01</i>	4
4. Modelo del material <i>Steel02</i>	5
5. Modelo del material <i>Concrete01</i>	5

1. Introducción

En el presente documento se describe un método para el análisis de secciones compuestas de materiales heterogéneos (hormigón armado, pretensado, mixtas, . . .). Dicho método de análisis permite:

- Formar una representación de las ecuaciones constitutivas del material *sección compuesta* que pueda emplearse en la formulación de elementos finitos de tipo barra o lámina.
- Como caso particular analizar la respuesta en tensiones normales de una sección sometida a compresión y flexión biaxial.

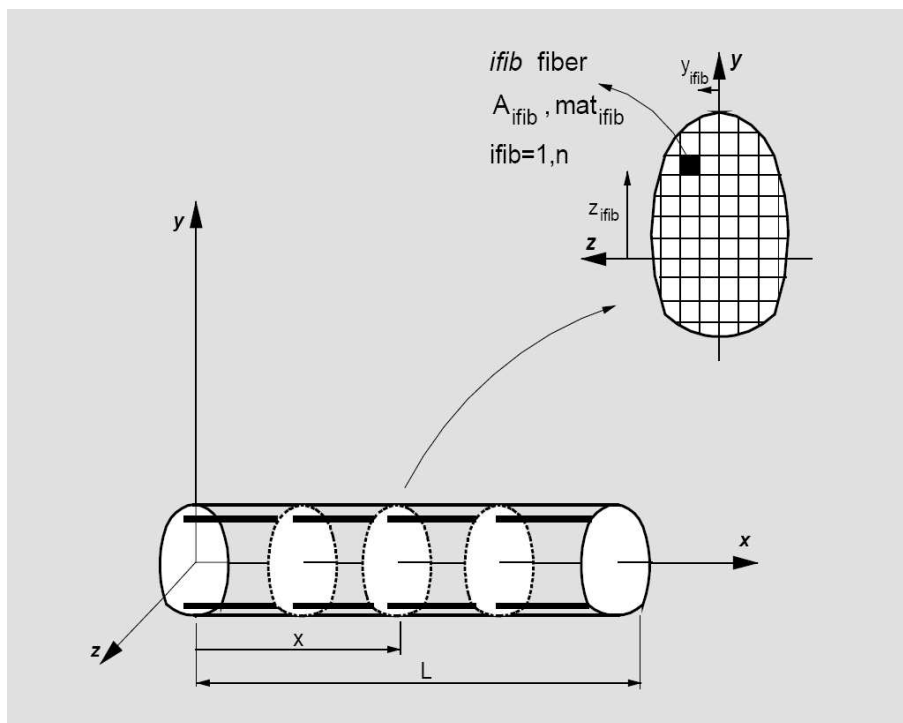


Figura 1: Modelo de fibras (tomada de la referencia [2]).

2. Hipótesis y consideraciones de partida

Se supone que las secciones planas y normales a la directriz de la pieza permanecen planas y perpendiculares a dicho eje durante toda la historia de deformaciones del elemento.

Se desprecian los efectos producidos por el cortante en la distribución de tensiones normales.

La precisión de la respuesta del modelo depende de la finura de la discretización que se emplee. Un mayor número de fibras proporciona una mayor precisión de la respuesta obtenida, a costa de un mayor coste computacional tanto en tiempo de cálculo como en las necesidades de memoria ya que, al tratarse de un modelo no lineal, será necesario almacenar un mayor número de variables históricas necesarias para seguir la pista al ciclo de histéresis de cada una de las fibras.

3. Fuerzas y deformaciones generalizadas

En la figura 1 se da una representación esquemática de un elemento de tipo barra cuyo material son secciones discretizadas en fibras. Cada sección, referida al sistema local x, y, z , se coloca en uno de los puntos de control del elemento (puntos de Gauss, Gauss-Lobatto¹,...). Cada sección se divide en n fibras².

Las fuerzas y deformaciones generalizadas que actúan sobre la sección se representan en el diagrama de cuerpo libre de la figura 2. El vector fuerza³ es:

¹El esquema de integración de Gauss-Lobatto permite el empleo de dos puntos de integración colocados en los extremos del elemento lo que, dado que en estos puntos suelen presentarse significativas deformaciones inelásticas, resulta una ventaja.

²El número de fibras no tiene porqué ser constante a lo largo del elemento.

³En lo que sigue se empleará la siguiente convención: las letras mayúsculas representan fuerzas, las minúsculas desplazamientos o deformaciones y los vectores se representan en negrita.

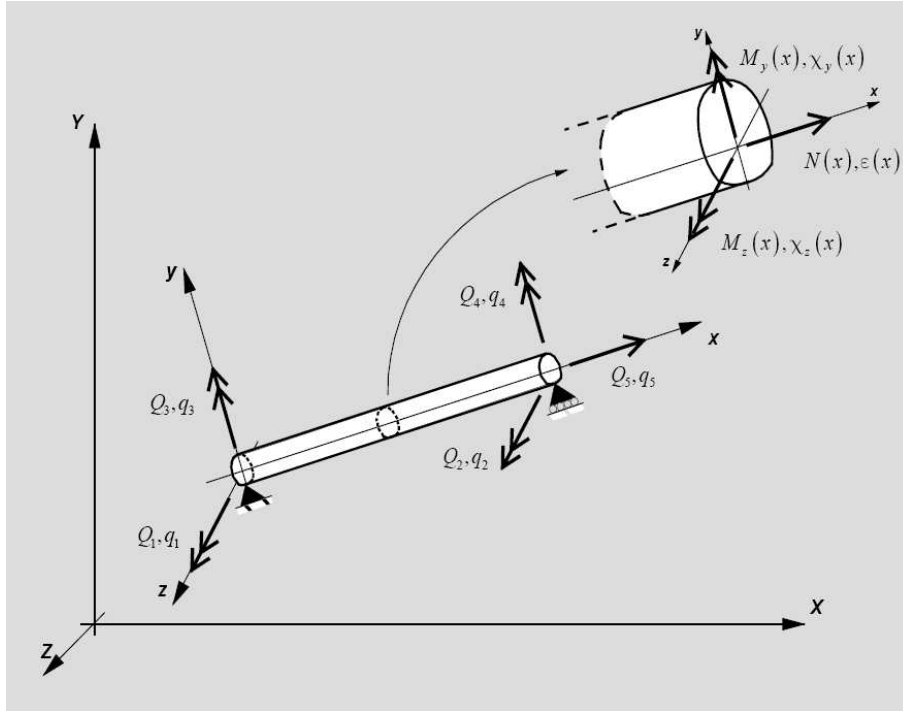


Figura 2: Fuerzas y deformaciones generalizadas (tomada de la referencia [2]).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} M_z \\ M_y \\ N \end{bmatrix} \quad (1)$$

y el vector de deformaciones:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \chi_z \\ \chi_y \\ \epsilon \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para describir el estado de las fibras se introducen dos vectores más que contienen las deformaciones y tensiones de las fibras. El vector de deformaciones de las fibras es:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_1(y_1, z_1) \\ \dots \\ \epsilon_i(y_i, z_i) \\ \dots \\ \epsilon_n(y_n, z_n) \end{bmatrix} \quad (3)$$

y el de tensiones:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \sigma_1(y_1, z_1) \\ \dots \\ \sigma_i(y_i, z_i) \\ \dots \\ \sigma_n(y_n, z_n) \end{bmatrix} \quad (4)$$

En dichos vectores los valores y_i, z_i se refieren a la posición de la fibra en la sección (ver figura 1).

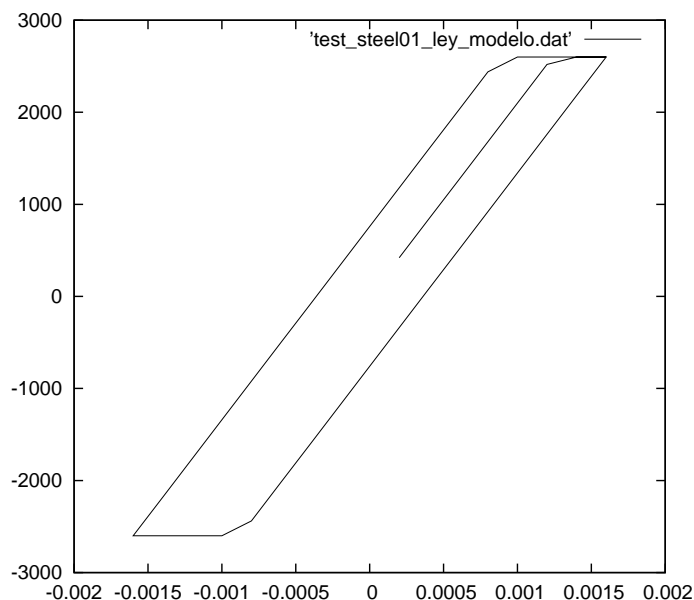


Figura 3: Modelo del material *Steel01*.

4. Ecuaciones cinemáticas

Admitida la hipótesis de que las secciones planas y normales a la directriz permanecen así durante las deformaciones sufridas por el elemento, el vector de deformaciones de las fibras y el de deformación de la sección cumplen la siguiente relación cinemática:

$$\mathbf{e} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{d} \quad (5)$$

siendo \mathbf{l} la matriz⁴:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -y_1 & z_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -y_i & z_i & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -y_n & z_n & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

5. Modelos constitutivos de las fibras

El comportamiento no lineal de la sección deriva directamente del de las fibras. Por tanto la validez de los resultados obtenidos depende de la precisión de los modelos empleados para el material. Para no extendernos demasiado en la descripción de los modelos empleados para los materiales de las fibras baste indicar que, para representar el comportamiento de las fibras que corresponden a la armadura pasiva de la sección, se emplea el modelo denominado *Steel01* cuyo diagrama⁵ tensión deformación se representa en la figura 3, análogamente para las fibras de armadura activa se emplea el modelo denominado *Steel02* (ver figura 4) y para el hormigón el modelo *Concrete01* (figura 5).

⁴Existen formas más complejas de la matriz \mathbf{l} que permiten introducir el efecto del cortante y de la pérdida de adherencia.

⁵La tensión de cedencia y la pendiente de la rama de cedencia, son parámetros del modelo del material que se ajustan en cada caso al valor adecuado.

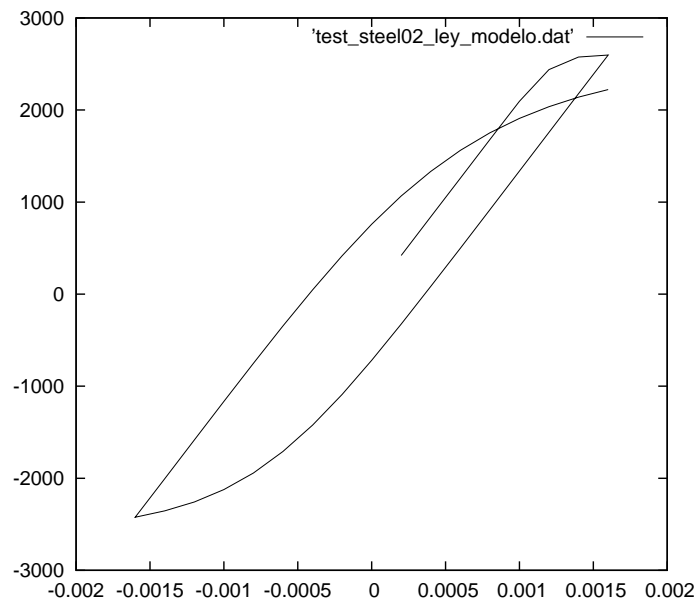


Figura 4: Modelo del material *Steel02*.

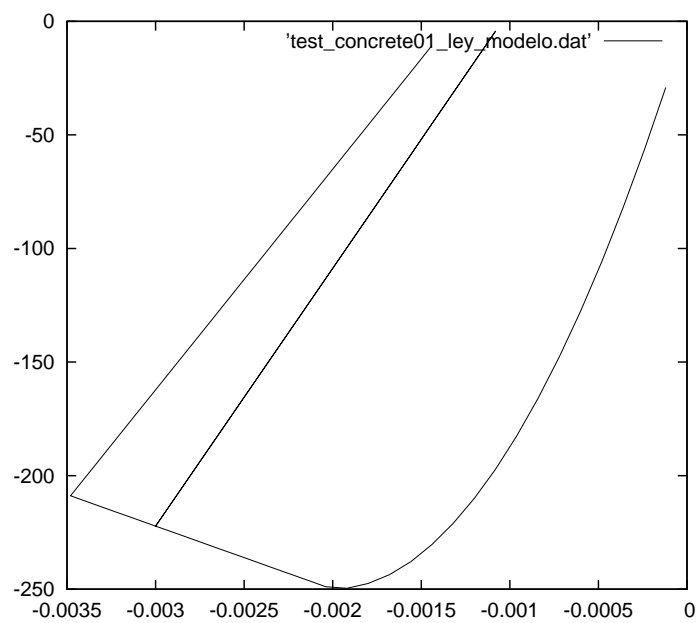


Figura 5: Modelo del material *Concrete01*.

Para terminar con la descripción de los modelos de los materiales hay que hacer notar que las leyes tensión-deformación de todos ellos son funciones explícitas de la deformación. Esto permite que a partir de los valores del vector \mathbf{d} puedan obtenerse las deformaciones en todas las fibras mediante la expresión 5 y, de forma inmediata⁶ las tensiones en todas las fibras.

También es importante indicar que **cada una de las fibras** lleva asociado un modelo del material en el que se almacenan las variables de estado de dicha fibra (básicamente deformación, tensión y módulo de rigidez tangente) que en general serán distintas entre fibras.

6. Determinación de la respuesta de la sección

Cuando, como en un modelo elástico lineal, la relación entre tensión y deformación generalizadas (esto es la relación entre los vectores \mathbf{D} y \mathbf{d}) es independiente de la deformación, la matriz de rigidez tangente de la sección \mathbf{k} es constante y no es necesario el empleo de procedimientos iterativos para la obtención de la solución.

6.1. Rigidez de la sección

Por contra, en el caso que nos ocupa la rigidez de la sección depende de su historia de cargas. Al emplear el modelo de fibras, usamos la ecuación cinemática 5 para obtener los incrementos de deformación en las fibras que se producirán para un determinado incremento del vector de deformaciones, es decir, para cada paso⁷ j tendremos:

$$\Delta \mathbf{e}^j = \mathbf{1} \cdot \Delta \mathbf{d}^j \quad (7)$$

para actualizar los valores de la deformación de las fibras se empleará la expresión:

$$\Delta \mathbf{e}^j = \mathbf{e}^{j-1} + \Delta \mathbf{e}^j \quad (8)$$

Las nuevas tensiones de las fibras σ_i^j y su módulo de rigidez tangente \mathbf{E}_i^j se determinan mediante el empleo de su diagrama tensión deformación según lo expuesto en el apartado 5; las tensiones se colocan en el vector \mathbf{E}^j (definido mediante la expresión 4) y los módulos de rigidez tangente se colocan en una matriz diagonal a la que llamaremos \mathbf{E}_{tan}^j . Si llamamos \mathbf{A} a la matriz diagonal cuyo elemento $A_{i,i}$ es el área de la fibra i , puede demostrarse que la matriz de rigidez de la sección en el paso j vendrá dada por:

$$\mathbf{k}^j = \mathbf{1}^T \cdot (\mathbf{E}_{tan}^j \mathbf{A}) \cdot \mathbf{1} \quad (9)$$

y operando se obtiene:

$$\mathbf{k}^j = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n E_i^j \cdot A_i \cdot y_i^2 & \sum_{i=1}^n E_i^j \cdot A_i \cdot y_i \cdot z_i & -\sum_{i=1}^n E_i^j \cdot A_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n E_i^j \cdot A_i \cdot y_i \cdot z_i & \sum_{i=1}^n E_i^j \cdot A_i \cdot z_i^2 & \sum_{i=1}^n E_i^j \cdot A_i \cdot z_i \\ -\sum_{i=1}^n E_i^j \cdot A_i \cdot y_i & \sum_{i=1}^n E_i^j \cdot A_i \cdot z_i \cdot z_i & \sum_{i=1}^n E_i^j \cdot A_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

Esta matriz de rigidez tangente puede invertirse para obtener la matriz de flexibilidad tangente \mathbf{f}^j .

⁶Si la función tensión-deformación no fuera explícita sería necesario calcular la tensión de cada fibra mediante algún procedimiento iterativo, lo que provocaría una fuerte ralentización del cálculo.

⁷Nos referimos aquí a un paso del procedimiento iterativo que se emplee para resolver el sistema no lineal; Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado, ...

6.2. Respuesta de la sección

Análogamente los esfuerzos con los que la sección responde a las acciones \mathbf{D}_R^j pueden obtenerse directamente sumando la fuerza y momentos que producen cada una de las fibras mediante la expresión:

$$\mathbf{D}_R^j = \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}^j \quad (11)$$

a partir de la cual, operando, se obtiene:

$$\mathbf{D}_R^j = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n \sigma_i^j \cdot A_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n \sigma_i^j \cdot A_i \cdot z_i \\ \sum_{i=1}^n \sigma_i^j \cdot A_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

7. Conclusión

El procedimiento expuesto en los apartados anteriores permite conocer la respuesta de una sección formada por fibras de distintos materiales sometida a unos esfuerzos cualesquiera. El procedimiento no depende de la forma de la sección ni es necesario que los esfuerzos cumplan ninguna condición especial (flexión simple, . . .).

Referencias

- [1] Ministerio de Fomento, *EHE; Instrucción de hormigón estructural*. (España: Comisión Permanente del Hormigón. Ministerio de Fomento. 1998).
- [2] Fabio F. Taucer et al., *A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures*. (EERC University of California, Berkeley. 1991).
- [3] Miguel Fernández Ruiz., *Evaluación no lineal de los efectos estructurales producidos por las deformaciones diferidas del hormigón y el acero*. (España: Departamento de mecánica de medios continuos y teoría de estructuras, ETSICCP Universidad Politécnica de Madrid. 2003).